پودمان چهارم:

لگاریتم و خواص آن

مدرس: دکتر باستان

لگاریتم

تعریف لگاریتم: اگر a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ باشد، و اعداد حقیقی b و c به گونه‌ای باشند که $b = a^c$ آن‌گاه c را لگاریتم b در مبنای a می‌نامند و با $\log_a b$ نشان می‌دهند یعنی $\log_a b = c$.

به طور خلاصه: رابطه بین توان و لگاریتم به صورت رو به رو است: $a^b = c \Leftrightarrow b = \log_a c$

مثال: **تساوی‌های زیر را به صورت لگاریتم بنویسید.**

حل:

الف) $۲^۳ = ۸ \Rightarrow ۳ = \log_۲ ۸$

ب) $a^x = y \Rightarrow x = \log_a y$

ج) $۰/۳^x = ۵ \Rightarrow x = \log_{۰/۳} ۵$

مثال: **تساوی‌های زیر را به صورت توان‌دار بنویسید.**

الف) $\log_y x = z \Rightarrow y^z = x$

ب) $\log_{۱۰} ۱۰۰۰ = ۳ \Rightarrow ۱۰^۳ = ۱۰۰۰$

ج) $\log_۵ ۲ = x \Rightarrow ۵^x = ۲$

نکته‌ها

- لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شود یعنی عبارت $\log_a b$ فقط برای $b > ۰$ تعریف می‌شود.
  مثلاً $\log_a (-۳)$ و $\log_a ۰$ تعریف نشده است.
- مبنای لگاریتم عددی مثبت و مخالف یک است.
  مثلاً $\log_۱ a$ و $\log_{-۲} a$ تعریف نمی‌شوند.

مثال: **اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد مقادیر $\log_a a$ و $\log_a ۱$ را بیابید.**

حل: فرض کنیم $\log_a a = x$ آنگاه x را می‌یابیم.

$$\log_a a = x \Rightarrow a^x = a \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow \log_a a = ۱$$

فرض می‌کنیم $\log_a ۱ = y$، آنگاه y را می‌یابیم.

$$\log_a ۱ = y \Rightarrow a^y = ۱ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow \log_a ۱ = ۰$$

نکته

برای هر عدد مثبت و مخالف ۱ مانند a داریم:

$$\log_a a = ۱ \quad , \quad \log_a ۱ = ۰$$

مثال: $\log_{۱۰} ۱۰ = ۱$ ، $\log_۲ ۲ = ۱$ ، $\log_۳ ۱ = ۰$ ، $\log_۲ ۱ = ۰$

تذکر: معمولاً برای نمایش لگاریتم در مبنای ۱۰، پایه لگاریتم را نمی‌نویسند.
یعنی به جای $\log_{۱۰} x$ می‌نویسند $\log x$.

نکته

$\log ۱۰ = ۱$ زیرا $\log ۱۰ = \log_{۱۰} ۱۰ = ۱$

مثال: **حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.**

الف) $\log_۲ ۱۶ =$

ب) $\log ۱۰۰۰ =$

ج) $\log_۵ \frac{۱}{۱۲۵}$

حل: الف) فرض می‌کنیم $\log_۲ ۱۶ = x$ باشد، x را می‌یابیم:

$$\log_۲ ۱۶ = x \Rightarrow ۲^x = ۱۶ \Rightarrow ۲^x = ۲^۴ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow \log_۲ ۱۶ = ۴$$

ب) فرض می‌کنیم $\log ۱۰۰۰ = x$ باشد مقدار x را می‌یابیم:

$$\log ۱۰۰۰ = x \Rightarrow \log_{۱۰} ۱۰۰۰ = x \Rightarrow ۱۰^x = ۱۰۰۰ \Rightarrow x = ۳$$

ج) فرض می‌کنیم $\log_۵ \frac{۱}{۱۲۵} = x$، مقدار x را می‌یابیم:

$$\log_۵ \frac{۱}{۱۲۵} = x \Rightarrow ۵^x = \frac{۱}{۱۲۵} \Rightarrow ۵^x = \frac{۱}{۵^۳} = ۵^{-۳} \Rightarrow x = -۳$$

خواص لگاریتم

در این قسمت با خواص و ویژگی‌های لگاریتم آشنا می‌شویم و به کمک آن‌ها حاصل عبارت‌های لگاریتمی را ساده‌تر پیدا می‌کنیم.

۱) دو ویژگی مقدماتی لگاریتم: $\log_a a = 1 \quad , \quad \log_a 1 = 0$

۲) لگاریتم حاصلضرب دو عدد با مجموع لگاریتم‌های آن دو عدد برابر است. $\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$

اگر مبنای لگاریتم ۱۰ باشد خاصیت بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود: $\log(ab) = \log a + \log b$

تذکر مهم: برای هر a و b مثبت داریم: $\log(a+b) \neq \log a + \log b$

۳) لگاریتم تقسیم دو عدد برابر است با لگاریتم مقسوم منهای لگاریتم مقسوم‌علیه، یعنی برای $a, b > 0$ داریم:

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

اگر مبنای لگاریتم ۱۰ باشد داریم: $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

تذکر مهم: $\log(a-b) \neq \log a - \log b \qquad (a, b > 0)$

۴) لگاریتم توان را به پشت می‌اندازد یعنی $\log_b a^n = n \log_b a$

۵) لگاریتم یک عدد در پایه غیر ۱۰ را می‌توانیم به صورت تقسیم لگاریتم دو عدد در پایه ۱۰ بنویسیم. یعنی برای $a, b > 0$ و $b \neq 1$ داریم:

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

مثال: **حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.**

الف) $\mathbf{\log 1000 =} \log 10^3 = 3\log 10 = 3 \times 1 = 3$

ب) $\mathbf{\log 4 + \log 25 =} \log(4 \times 25) = \log 100 = \log 10^2 = 2\log 10 = 2 \times 1 = 2$

پ) $\mathbf{\log \sqrt[4]{125} =} \log_5 \sqrt[4]{5^3} = \log_5 5^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}\log_5 5 = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$

یادآوری: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

ت) $\mathbf{3\log \sqrt[3]{50} + 2\log \sqrt{2} =} \log(\sqrt[3]{50})^3 + \log(\sqrt{2})^2 = \log 50 + \log 2 = \log(50 \times 2) = \log 100 = \log 10^2 = 2\log 10 = 2$

ث) $\mathbf{\log 0/01 =} \log \frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = 0 - \log 10^2 = -2\log 10 = -2 \times 1 = -2$

ج) $\mathbf{\log 300 - \log 3 =} \log \frac{300}{3} = \log 100 = \log 10^2 = 2\log 10 = 2 \times 1 = 2$

چ) $\mathbf{\frac{\log 6 + \log 3}{\log 3 + \log \sqrt{2}} =} \frac{\log(6 \times 3)}{\log(3\sqrt{2})} = \frac{\log 18}{\log \sqrt{18}} = \frac{\log 18}{\log (18)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\log 18}{\frac{1}{2}\log 18} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

ح) $\mathbf{\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + ... + \log \frac{99}{100} =} \log(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times ... \times \frac{99}{100}) = \log \frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = 0 - \log 10^2 = -2\log 10 = -2$

خ) $\mathbf{\log_6 2\sqrt{3} + \log_6 3\sqrt{2} =} \log_6 (2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}) = \log_6 6\sqrt{6} = \log_6 (6^1 \times 6^{\frac{1}{2}}) = \log_6 6^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_6 6 = \frac{3}{2}$

د) $\mathbf{\log_8 (\log_3 (\log_2 512) =}$

$\log_2 512 = \log_2 2^9 = 9\log_2 2 = 9$

$$\log_8 (\log_3 (\log_2 512) = \log_8 (\log_3 9) = \log_8 (\log_3 3^2) = \log_8 (2\log_3 3) = \log_8 2 = \frac{\log 2}{\log 8} = \frac{\log 2}{\log 2^3} = \frac{\log 2}{3\log 2} = \frac{1}{3}$$

نکته

رابطه بین $\log 2$ و $\log 5$: $\log 5 = 1 - \log 2 \quad , \quad \log 2 = 1 - \log 5$

زیرا: $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$

مثال: اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد حاصل عبارت‌های زیر را برحسب a و b بنویسید.

حل:

الف) $\log 6 = \log(2\times 3) = \log 2 + \log 3 = a+b$

ب) $\log\frac{25}{27} = \log 25 - \log 27 = \log 5^2 - \log 3^3 = 2\log 5 - 3\log 3 = 2(1-\log 2) - 3b = 2(1-a)-3b = 2-2a-3b$

ج) $\log 12\sqrt{5} = \log 12 + \log\sqrt{5} = \log 2^2\times 3 + \log 5^{\frac{1}{2}} = \log 2^2 + \log 3 + \frac{1}{2}\log 5 = 2\log 2 + b + \frac{1}{2}(1-\log 2)$

$= 2a+b+\frac{1}{2}(1-a) = 2a+b+\frac{1}{2}-\frac{a}{2} = \frac{3a}{2}+b+\frac{1}{2}$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

حل:

الف) $1+\log_2 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2(2\times 3) = \log_2 6$

ب) $2-\log_4 5 = 2\log_4 4 - \log_4 5 = \log_4 4^2 - \log_4 5 = \log_4 16 - \log_4 5 = \log_4\frac{16}{5}$

پ) $\frac{2\log 5}{3\log 2} = \frac{\log 5^2}{\log 2^3} = \frac{\log 25}{\log 8} = \log_8 25$

ت) $\frac{1}{2}\log a + 3\log b - 5\log c = \log a^{\frac{1}{2}} + \log b^3 - \log c^5 = \log\sqrt{a}.b^3 - \log c^5 = \log(\frac{b^3\sqrt{a}}{c^5})$

مثال: باکتری‌هایی را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از ۱ واحد زمانی دو برابر می‌شود.

الف) اگر با یک گرم از این باکتری‌ها شروع کنیم مقدار این باکتری پس از ۵ واحد زمانی چند گرم می‌شود؟

پس از ۵ واحد زمانی مقدار باکتری 2^5 یعنی ۳۲ برابر می‌شود و چون ابتدا یک گرم داشتیم بنابراین پس از ۵ واحد زمانی $32\times 1 = 32$ گرم باکتری داریم.

ب) پس از چند واحد زمانی مقدار باکتری‌ها ۵۱۲ گرم می‌شود.

باید بدانیم که چه توانی از ۲ مساوی ۵۱۲ می‌شود و این همان $\log_2 512$ است.

$\log_2 512 = \log_2 2^9 = 9\log_2 2 = 9\times 1 = 9$

بیشتر بدانیم:

۱) $\log_{b^m} a = \frac{1}{m}\log_b a$ ، ۲) $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m}\log_b a$ ، ۳) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

۴) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ ، ۵) $\log_b a\times\log_c b = \log_c a$

مثال:

الف) $\log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}\log_2 2 = \frac{2}{3}$

ب) $\log_{3\sqrt{3}}\frac{1}{9} = \log_{3\times 3^{\frac{1}{2}}} 3^{-2} = \log_{3^{\frac{3}{2}}} 3^{-2} = \frac{-2}{\frac{3}{2}}\log_3 3 = -\frac{4}{3}\times 1 = -\frac{4}{3}$

ج) $\log_7 32\times\log_2 7 = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5\log_2 2 = 5\times 1 = 5$

نکته: بیشتر بدانیم:

۱) $\log_{b^m} a = \frac{1}{m}\log_b a$ ۲) $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m}\log_b a$ ۳) $a^{\log_a b} = b$ ۴) $\log_b a\times\log_c b = \log_c a$ ۵) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$